۱۰۱. در محل تقاطع خط d و خط $x=۴$ در بالای محور xها، زاویهٔ حادهٔ ۳۰° ایجاد شده است. اگر خط محور طول‌ها را در نقطه‌ای با طول $x'>۴$ قطع نماید، شیب این خط کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۰۲. خطی با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۱۲۰° می‌سازد و از نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix}$ می‌گذرد. عرض از مبداء این خط کدام است؟

۱) $۴+۲\sqrt{۳}$ ۲) $-۴-\sqrt{۳}$ ۳) $۳+\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۴) $-۴-\frac{۲}{\sqrt{۳}}$

۱۰۳. امتداد خطی که از نقطه $A(-۱,۳)$ گذشته و با راستای منفی محور xها زاویه ۳۰° می‌سازد محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث OAB (O مبدأ مختصات) کدام است؟

۱) $\frac{۱۴\sqrt{۳}-۹}{۶}$ ۲) $\frac{۲۸\sqrt{۳}-۱۸}{۳}$ ۳) $\frac{۱۴\sqrt{۳}-۹}{۳}$ ۴) $\frac{۲۸\sqrt{۳}}{۶}$

درس سوم: روابط بین نسبت های مثلثاتی

اتحادهای مثلثاتی

۱) $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$

۲) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

۳) $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{۱}{\tan\theta}$

۴) $۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$

۵) $۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$

۶) $\sin^۴\theta+\cos^۴\theta=۱-۲\sin^۲\theta\cos^۲\theta$

۷) $\sin^۶\theta+\cos^۶\theta=۱-۳\sin^۲\theta\cos^۲\theta$

مثال تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$ ب) $۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$

پاسخ

الف) $۱+\cot^۲\theta=۱+\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\frac{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}\xrightarrow{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱}۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$

ب) $۱+\tan^۲\theta=۱+\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{\cos^۲\theta+\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}\xrightarrow{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱}۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$

مثال تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin^۴\theta+\cos^۴\theta=۱-۲\sin^۲\theta\cos^۲\theta$ ب) $\sin^۶\theta+\cos^۶\theta=۱-۳\sin^۲\theta\cos^۲\theta$

پاسخ

الف) $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab\rightarrow\sin^۴\theta+\cos^۴\theta=(\sin^۲\theta)^۲+(\cos^۲\theta)^۲=$

$(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)^۲-۲\sin^۲\theta\cos^۲\theta=۱^۲-۲\sin^۲\theta\cos^۲\theta=۱-۲\sin^۲\theta\cos^۲\theta$

ب) $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)\Rightarrow\sin^۶\theta+\cos^۶\theta=(\sin^۲\theta)^۳+(\cos^۲\theta)^۳=$

$(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)^۳-۳\sin^۲\theta\cos^۲\theta(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)=۱^۳-۳\sin^۲\theta\cos^۲\theta\times(۱)=۱-۳\sin^۲\theta\cos^۲\theta$

نکته

$$۱-۲\sin x\cos x=(\sin x-\cos x)^۲$$
$$۱+۲\sin x\cos x=(\sin x+\cos x)^۲$$

مثال تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{\cos x}{۱+\sin x}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}$

ب) $\tan x+\cot x=\frac{۱}{\sin x\cos x}$

ج) $\sqrt{۱-۲\sin x\cos x}=|\sin x-\cos x|$

پاسخ

الف) $\frac{\cos x}{۱+\sin x}\times\frac{(۱-\sin x)}{(۱-\sin x)}=\frac{\cos x(۱-\sin x)}{(۱+\sin x)(۱-\sin x)}=\frac{\cos x(۱-\sin x)}{۱-\sin^۲ x}=\frac{\cos x(۱-\sin x)}{\cos^۲ x}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}$

ب) $\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\cos x\sin x}=\frac{۱}{\sin x\cos x}$

ج) $\sqrt{۱-۲\sin x\cos x}=\sqrt{\underbrace{(\sin^۲ x+\cos^۲ x)}_{۱}-۲\sin x\cos x}=\sqrt{\sin^۲ x-۲\sin x\cos x+\cos^۲ x}=$

$\sqrt{(\sin x-\cos x)^۲}=|\sin x-\cos x|$

مثال اگر $\tan x=-۳$، حاصل عبارت $\frac{۴\sin x-۳\cos x}{۵\sin x+۴\cos x}$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$\tan x=-۳\Rightarrow\cos x\neq ۰$

$\frac{۴\sin x-۳\cos x}{۵\sin x+۴\cos x}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را بر } \cos x \text{ تقسیم می‌کنیم}}\frac{\frac{۴\sin x-۳\cos x}{\cos x}}{\frac{۵\sin x+۴\cos x}{\cos x}}=\frac{\frac{۴\sin x}{\cos x}-\frac{۳\cos x}{\cos x}}{\frac{۵\sin x}{\cos x}+\frac{۴\cos x}{\cos x}}=$

$\frac{۴\tan x-۳}{۵\tan x+۴}\xrightarrow{\tan x=-۳}\frac{۴(-۳)-۳}{۵(-۳)+۴}=\frac{-۱۵}{-۱۱}=\frac{۱۵}{۱۱}$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۰۴. نکته‌دار کدام جفت از اعداد زیر نمی‌توانند مقادیر سینوس و کسینوس یک زاویه باشند؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ و $-\frac{۴}{۵}$ ۲) ۰ و ۱ ۳) $\frac{۸}{۱۷}$ و $\frac{۱۵}{۱۷}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$ و $\frac{۳}{۸}$

۱۰۵. اگر θ زاویهٔ حاده و $\sin\theta=۰/۹۶$ باشد، مقدار $\sin\theta-\cos\theta$ کدام است؟

۱) ۰/۷۲ ۲) ۰/۶۲ ۳) ۰/۶۶ ۴) ۰/۶۸

۱۰۶. اگر $\cos x=\frac{۱}{۱۰}$ و $۰<x<۹۰^\circ$، $\sin x$ برابر است با: (مسابقات ریاضی کانگورو ۱۹۹۸)

۱) $\frac{۹}{۱۰}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۱۱}}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۹\sqrt{۱۱}}{۱۰۰}$

۱۰۷. حاصل $A=۴\sin^۲ ۱۵^\circ-۳\tan^۲ ۳۰^\circ+۴\cos^۲ ۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) -۳

۱۰۸. اگر θ زاویه‌ای حاده و $x=\frac{۱}{۳}\cos\theta$ و $y=۲\sin\theta$ باشد، آنگاه کدام درست است؟

۱) $y^۲+۳۶x^۲=۴$ ۲) $y^۲+۳۶x^۲=۹$ ۳) $۳۶y^۲+x^۲=۴$ ۴) $۳۶y^۲+x^۲=۹$

۱۰۹. عبارت $\tan^۲\theta\cos^۲\theta+\cot^۲\theta\sin^۲\theta$ برابر است با: (کنکور)

۱) ۱ ۲) $\cos^۲\theta$ ۳) $\sin^۲\theta$ ۴) $\tan^۲\theta$

۱۱۰. حاصل عبارت $\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta\tan\theta)$ برابر است با: (کنکور)

۱) $\cos^2\theta$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\sin^2\theta$

۱۱۱. حاصل $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}-(1+\cot\theta)(1+\tan\theta)$ برابر با کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -1

۱۱۲. حاصل عبارت $(1-\cos\theta)(1+\sin\theta\cot\theta)-\tan\theta\cdot\cot\theta$ برابر کدام است؟ (کنکور)

۱) $\sin^2\theta$ ۲) $-\sin^2\theta$ ۳) $\cos^2\theta$ ۴) $-\cos^2\theta$

۱۱۳. عبارت $\cos^2\theta-\sin^2\theta$ با کدام برابر نیست؟ (کنکور)

۱) $2\sin\theta\cos\theta-1$ ۲) $1-2\sin^2\theta$ ۳) $2\cos^2\theta-1$ ۴) $\cos^4\theta-\sin^4\theta$

۱۱۴. حاصل عبارت $(\cos\theta-1)(\cos\theta+1)+\cos^2\theta(1+2\tan^2\theta)$، کدام است؟ (کنکور)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۵. حاصل $(\frac{1}{\cos\theta}+1)(\frac{1}{\cos\theta}-1)$ برابر کدام است؟ (کنکور)

۱) $\tan^2\theta$ ۲) $\cot^2\theta$ ۳) $\frac{1}{\sin^2\theta}$ ۴) $\frac{1}{\cos^2\theta}$

۱۱۶. حاصل عبارت $\frac{\sin\theta}{(\sin\theta)^{-1}+1}+\frac{\sin\theta}{(\sin\theta)^{-1}-1}$ کدام است؟

۱) $2\sin^2\theta$ ۲) $2\tan^2\theta$ ۳) $2\cos^2\theta$ ۴) $2\cot^2\theta$

۱۱۷. ساده شدهٔ عبارت $(1-\tan^2\theta)(1-\sin^2\theta)$ کدام است؟ (کنکور)

۱) $2\cot^2\theta$ ۲) $2\tan^2\theta$ ۳) $1-2\cos^2\theta$ ۴) $1-2\sin^2\theta$

۱۱۸. حاصل $(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\tan\theta\cos^2\theta$ برابر کدام است؟ (کنکور)

۱) ۱ ۲) $\tan\theta$ ۳) $1+\cot\theta$ ۴) ۰

۱۱۹. اگر $\sin^2\alpha=\frac{1}{4}$ و $\cos\alpha+\sin\alpha<0$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه قرار می‌گیرد؟ (کمان α در موقعیت استاندارد است.)

۱) اول یا دوم ۲) دوم یا سوم ۳) سوم یا چهارم ۴) اول یا چهارم

۱۲۰. اگر $\sin x+\tan x>0$ و $\frac{1}{\cos x}-\sin x\cdot\tan x<0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه است؟ (کنکور)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۲۱. حاصل $2\tan^2\theta-(\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta})$ کدام است؟ (کنکور)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲۲. ساده شدهٔ عبارت $(1-\cos\theta)^2-(1+\frac{1}{\cos^2\theta})(1-\sin^2\theta)$، کدام است؟ (کنکور)

۱) $\sin^2\theta$ ۲) $\cos^2\theta$ ۳) $-\cos^2\theta$ ۴) $2\cos\theta$

۱۲۳. مقدار کسر $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ با کدام عبارت برابر است؟

۱) $1+\tan\theta$ ۲) $1+\cot\theta$ ۳) $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ ۴) $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

۱۲۴. حاصل عبارت $\frac{\sin^4x+\cos^4x}{\sin^2x\cos^2x}-(\tan x+\cot x)^2$ کدام است؟ (کنکور)

۱) -2 ۲) ۲ ۳) -1 ۴) صفر

۱۲۵. مقدار عبارت $y=(\tan x+\cot x)^2-\tan^2x-\cot^2x$ کدام است؟ (مشابه کنکور)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۶. اگر $\cot\theta = \sqrt{x}+2$ و $\tan\theta = \sqrt{x}-2$، در این صورت مقدار x کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۷. اگر $\tan x = \frac{3}{4}$ باشد، حاصل $A = \frac{4}{\cos x} - \frac{3}{\sin x}$ کدام است؟ (کنکور)

۱) صفر ۲) -1 ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۱

۱۲۸. اگر $\tan x = 5$ آنگاه مقدار کسر $\frac{\sin x + 3\cos x}{\sin x - 3\cos x}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۲۹. رابطهٔ $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \frac{1}{\cos x} - \tan x$ وقتی برقرار است که انتهای x در ..... واقع باشد.

۱) ناحیهٔ اول یا دوم ۲) ناحیهٔ اول یا سوم ۳) ناحیهٔ اول یا چهارم ۴) در هر ناحیه

۱۳۰. اگر $\sqrt{1+m\tan x} = \frac{1}{\cos x}$ و انتهای کمان x در ربع چهارم باشد، m چگونه است؟

۱) $|m|>1$ ۲) $|m|<1$ ۳) $m>0$ ۴) $m<0$

۱۳۱. اگر $\frac{2\cos x}{\sin x + 3\cos x} = 2$ باشد، $\cot x$ کدام است؟ (مشابه آزاد ریاضی ۸۹)

۱) ۲ ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۳۲. اگر $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ و انتهای کمان x در ربع اول باشد، $\tan x$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۵)

۱) $2\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $8\sqrt{5}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

۱۳۳. مهم هرگاه سینوس زاویهٔ حادهٔ α برابر با k باشد، تانژانت زاویهٔ α کدام است؟

۱) $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ ۳) $\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$

۱۳۴. حاصل $\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ کدام است؟ (کنکور)

۱) $\sin\theta$ ۲) $\cos\theta$ ۳) $\sin\theta+\cos\theta$ ۴) $\sin\theta\cos\theta$

۱۳۵. حاصل $(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)$ کدام است؟ (کنکور)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\cos^2\theta$ ۴) $\cot^2\theta$

۱۳۶. مهم اگر $\cot x = -2$ و $\sin x > 0$ باشد، مقدار $\cos x$ چقدر است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

۱۳۷. اگر $\sin\theta = \frac{3}{5}$ و θ زاویه‌ای منفرجه باشد $(90^\circ < \theta < 180^\circ)$، حاصل $\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۸. اگر $\frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x - \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sin x\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{25}{12}$ ۲) $-\frac{25}{12}$ ۳) $\frac{12}{25}$ ۴) $-\frac{12}{25}$

۱۳۹. دشوار اگر انتهای کمان x در ناحیهٔ سوم مثلثاتی باشد و داشته باشیم $\tan x - 3\cot x = 2$، آنگاه مقدار $\cos x$ کدام است؟ (کمان x در موقعیت استاندارد است.)

۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ۳) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ ۴) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

۱۴۰. اگر $x=\frac{۲}{\sin\alpha}$ و $y=۳\cot\alpha$، مقدار $۹x^۲$ کدام است؟ (کنکور)

۱) $۴+۹y^۲$ ۲) $۹+۴y^۲$ ۳) $۳۶-۴y^۲$ ۴) $۳۶+۴y^۲$

۱۴۱. با فرض $\cos\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، حاصل عبارت $\sin^۴\theta-\cos^۴\theta+\frac{۱}{۱+\tan^۲\theta}$ کدام است؟ (کنکور)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۴۲. به ازای کدام مقدار A، تساوی $\frac{۱}{\cos^۴x}+\frac{A}{\cos^۲x}=\tan^۴x-۱$ یک اتحاد است؟ (کنکور)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۴۳. اگر برای هر x رابطهٔ $\cos۴x=A\cos^۴x-B\cos^۲x+\frac{A}{B}$ برقرار باشد حاصل $۳A-B$ کدام است؟

۱) -۱۶ ۲) ۱۶ ۳) -۴ ۴) ۴

۱۴۴. رسوا اگر θ زاویه‌ای حاده باشد و $\cot\theta=\frac{a-b}{a+b}$، آنگاه $\sin\theta$ کدام است؟ $(a>b>۰)$

۱) $\frac{a+b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ ۲) $\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{a-b}$ ۳) $\frac{a+b}{\sqrt{۲(a^۲+b^۲)}}$ ۴) $\frac{a-b}{\sqrt{۲(a^۲+b^۲)}}$

۱۴۵. اگر $\cot x=a+۲$ و $\sin x=\frac{۱}{b}$، آنگاه کدام رابطه درست است؟

۱) $a^۲+b^۲=۲ab$ ۲) $b^۲=۱+(a+۲)^۲$ ۳) $(a+۱)^۲+b^۲=۱$ ۴) $(a+۲)^۲+b^۲=۱$

۱۴۶. اگر $\tan x=\frac{۲ab}{a^۲-b^۲}$، که در آن $a>b>۰$ و $۰^\circ<x<۹۰^\circ$، آنگاه $\sin x$ برابر است با: (مسابقات ریاضی آمریکا)

۱) $\frac{b}{a}$ ۲) $\frac{\sqrt{a^۲-b^۲}}{۲a}$ ۳) $\frac{\sqrt{a^۲-b^۲}}{۲ab}$ ۴) $\frac{۲ab}{a^۲+b^۲}$

۱۴۷. نکته‌دار اگر $\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار $\sin^۲x\cos^۲x$ کدام است؟ (مشابه کنکور)

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۱۴۸. حاصل عبارت $\frac{(۱-۲\sin x\cos x)(۱+۲\sin x\cos x)+۲\sin^۲x\cos^۲x}{\sin^۴x+\cos^۴x}$ چیست؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) $۱-\sin^۲x\cos^۲x$ ۴) ۱

۱۴۹. نکته‌دار اگر $\sin x+\cos x=\frac{۱}{۳}$ باشد حاصل $\sin^۳x+\cos^۳x$ چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۸۶)

۱) $\frac{۱۳}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۳}{۸۱}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۷}{۸۱}$

۱۵۰. اگر $\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۳}{۵}$ باشد، حاصل $\sin^۶x+\cos^۶x$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۱۵۱. ساده شدهٔ عبارت $\frac{۱-(۳\sin^۲x\cos^۲x)^۲}{\sin^۶x+\cos^۶x}$ کدام است؟

۱) $۱-۳\sin^۲x\cos^۲x$ ۲) $۱-۹\sin^۲x\cos^۲x$ ۳) $۱+۳\sin^۲x\cos^۲x$ ۴) $۱+۹\sin^۲x\cos^۲x$

مینیمم و ماکزیمم عبارت‌های مثلثاتی

نکته $\left.\begin{matrix}-۱\le \sin x\le ۱\\ -۱\le \cos y\le ۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow -|a|-|b|\le a\sin x+b\cos y\le |a|+|b|$

به عنوان نمونه:

$-|۲|-|-۳|\le ۲\sin x-۳\cos y\le |۲|+|-۳|\Rightarrow -۵\le ۲\sin x-۳\cos y\le ۵$

نکته اگر $a\sin x+b\cos y=|a|+|b|$، آنگاه $|\sin x|=|\cos y|=۱$. مثبت یا منفی یک بودن $\sin x$ یا $\cos y$ را علامت ضریب‌های a و b تعیین می‌کند.

به عنوان نمونه:

$۲\sin x-۲\cos y=۴\Rightarrow ۲\sin x-۲\cos y=|۲|+|-۲|\Rightarrow \sin x=۱$ و $\cos y=-۱$

مثال اگر $\sin x-۲\cos y=۳$، آنگاه حاصل $\sin^۳ x+\cos^۳ y$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$\sin x-۲\cos y=۳\Rightarrow \sin x-۲\cos y=|۱|+|-۲|\Rightarrow \sin x=۱$ و $\cos y=-۱\Rightarrow \sin^۳ x+\cos^۳ y=(۱)^۳+(-۱)^۳=۰$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۵۲. **مهم** اگر $\sin\alpha+\sin\beta=۲$، حاصل $\sin^۴\alpha+\cos^۳\beta$ چند است؟

۱) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۵۳. بیش‌ترین مقدار $\sin(۱۸۰^\circ\times y)+\sin(۱۸۰^\circ\times x)$ کدام است؟ (مشابه آزمایشی سنجش تجربی ۹۰)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۱۵۴. اگر $\sin(x+y)+\sin(۲x-y+۳۰^\circ)=۲$ و هر دو زاویهٔ x و y حاده باشند، آنگاه مقدار $x+۲y$ کدام است؟

۱) ۱۰۰° ۲) ۱۱۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۳۰°

۱۵۵. مقدار ماکزیمم $|۵\sin x-۳|$ برابر است با: (مسابقات ریاضی کانگورو ۲۰۰۸)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۵۶. **دشوار** به ازای کدام مقدار x گزارهٔ $\sin a=x^۲-۴x+۵$ می‌تواند همواره درست باشد؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۵۷. **دشوار** اگر $\sin x+\cos x=-\sqrt{۲}$ باشد، حاصل $\sin^۳ x+\cos^۵ x$ چقدر است؟ (آزاد تجربی ۸۸)

۱) $-\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۸}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$

۱۵۸. **نکته‌دار** اگر $\tan x+\frac{۱}{\tan x}=k-۱$ باشد، حدود k برای آنکه معادله جواب داشته باشد کدام است؟ (آزاد تجربی ۸۷)

۱) $-۱<k<۳$ ۲) $k\ge ۳$ یا $k\le -۱$ ۳) $k>۲$ ۴) $k<-\frac{۱}{۲}$

۱۵۹. تساوی $\tan x+\cot x=\sqrt{۳}$، به ازای چند مقدار x در بازهٔ $[۰,۳۶۰^\circ]$ برقرار است؟ (مشابه آزاد ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۶۰. اگر $\tan x+\cot x=-۲$ باشد، حاصل $\sin^۶ x+\cos^۴ x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $۱+\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ نامه

۱۰۴. گزینه ۴

نکته برای هر زاویهٔ θ داریم: $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$

بررسی گزینهٔ ۱: $(\frac{۳}{۵})^۲+(-\frac{۴}{۵})^۲=\frac{۹}{۲۵}+\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۲۵}{۲۵}=۱$ ✓

بررسی گزینهٔ ۲: $۰^۲+۱^۲=۰+۱=۱$ ✓

بررسی گزینهٔ ۳: $(\frac{۸}{۱۷})^۲+(\frac{۱۵}{۱۷})^۲=\frac{۶۴}{۲۸۹}+\frac{۲۲۵}{۲۸۹}=\frac{۲۸۹}{۲۸۹}=۱$ ✓

بررسی گزینهٔ ۴: $(\frac{۳}{۸})^۲+(\frac{۷}{۸})^۲=\frac{۹}{۶۴}+\frac{۴۹}{۶۴}=\frac{۵۸}{۶۴}\neq ۱$ ×

۱۰۵. گزینه ۴

$$\sin\theta=۰/۹۶=\frac{۹۶}{۱۰۰}=\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow(\frac{۲۴}{۲۵})^۲+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow\cos^۲\theta=۱-(\frac{۲۴}{۲۵})^۲=(۱+\frac{۲۴}{۲۵})(۱-\frac{۲۴}{۲۵})\Rightarrow$$

$$\cos^۲\theta=\frac{۴۹}{۲۵}\times\frac{۱}{۲۵}\xrightarrow{(\theta<۹۰^\circ)}\cos\theta=\sqrt{\frac{۴۹}{۲۵^۲}}\Rightarrow\cos\theta=\frac{۷}{۲۵}$$

$$\sin\theta-\cos\theta=\frac{۲۴}{۲۵}-\frac{۷}{۲۵}=\frac{۱۷}{۲۵}=\frac{۶۸}{۱۰۰}=۰/۶۸$$

۱۰۶. گزینه ۲

$$\cos x=\frac{۱}{۱۰}\ \text{و}\ ۰<x<۹۰^\circ\Rightarrow\sin x>۰$$

$$\sin^۲x+\cos^۲x=۱\Rightarrow\sin^۲x+(\frac{۱}{۱۰})^۲=۱\Rightarrow\sin^۲x+\frac{۱}{۱۰۰}=۱\Rightarrow\sin^۲x=\frac{۹۹}{۱۰۰}\xrightarrow{۰<\sin x}\sin x=\frac{\sqrt{۹۹}}{۱۰}=\frac{۳\sqrt{۱۱}}{۱۰}$$

۱۰۷. گزینه ۱

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow\tan^۲ ۳۰^\circ=\frac{۱}{۳}$$

$$۴\sin^۲ ۱۵^\circ-۳\tan^۲ ۳۰^\circ+۴\cos^۲ ۱۵^\circ=۴(\sin^۲ ۱۵^\circ+\cos^۲ ۱۵^\circ)-۳\tan^۲ ۳۰^\circ=۴\times۱-۳\times\frac{۱}{۳}=۴-۱=۳$$

۱۰۸. گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l}x=\frac{۱}{۳}\cos\theta\Rightarrow ۳x=\cos\theta\\ y=۲\sin\theta\Rightarrow\frac{y}{۲}=\sin\theta\end{array}\right\}\xrightarrow{\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱}(۳x)^۲+(\frac{y}{۲})^۲=۹x^۲+\frac{y^۲}{۴}=۱\Rightarrow ۳۶x^۲+y^۲=۴$$

۱۰۹. گزینه ۱

$$\tan^۲\theta\cos^۲\theta+\cot^۲\theta\sin^۲\theta=\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}\times\cos^۲\theta+\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}\times\sin^۲\theta=\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$$

۱۱۰. گزینه ۴

$$\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta\tan\theta)=\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta})=\cos^۲\theta+\cos\theta\times\frac{\sin^۲\theta}{\cos\theta}=\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱$$

۱۱۱. گزینه ۱

$$(۱+\tan\theta)(۱+\cot\theta)-\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta}=(۱+\frac{\sin\theta}{\cos\theta})(۱+\frac{\cos\theta}{\sin\theta})-\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta}=$$

$$(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta})(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta})-\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^۲}{\sin\theta\cos\theta}-\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^۲-۱}{\sin\theta\cos\theta}=$$

$$\frac{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta+۲\sin\theta\cos\theta-۱}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{۱+۲\sin\theta\cos\theta-۱}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{۲\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=۲$$

۱۱۲. گزینهٔ ۴

$$(۱-\cos\theta)(۱+\sin\theta\cot\theta)-\tan\theta\cot\theta=(۱-\cos\theta)(۱+\sin\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta})-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=(۱-\cos\theta)(۱+\cos\theta)-۱=۱-\cos^۲\theta-۱=-\cos^۲\theta$$

۱۱۳. گزینهٔ ۱

بررسی گزینهٔ ۱: $\theta=۰\Rightarrow\begin{cases}\cos^۲\theta-\sin^۲\theta=۱-۰=۱\\ ۲\sin\theta\cos\theta-۱=۰-۱=-۱\end{cases}$ ×

بررسی گزینهٔ ۲: $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\xrightarrow{-۲\sin^۲\theta}\cos^۲\theta-\sin^۲\theta=۱-۲\sin^۲\theta$ ✓

بررسی گزینهٔ ۳: $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\xrightarrow{+\cos^۲\theta-\sin^۲\theta}۲\cos^۲\theta=۱+\cos^۲\theta-\sin^۲\theta\Rightarrow۲\cos^۲\theta-۱=\cos^۲\theta-\sin^۲\theta$ ✓

بررسی گزینهٔ ۴: $\cos^۴\theta-\sin^۴\theta=(\cos^۲\theta+\sin^۲\theta)(\cos^۲\theta-\sin^۲\theta)=۱\times(\cos^۲\theta-\sin^۲\theta)=\cos^۲\theta-\sin^۲\theta$ ✓

۱۱۴. گزینهٔ ۴

$$\cos^۲\theta(۱+۲\tan^۲\theta)+(\cos\theta-۱)(\cos\theta+۱)=\cos^۲\theta(۱+۲\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta})+\cos^۲\theta-۱$$

$$=\cos^۲\theta+۲\sin^۲\theta-\sin^۲\theta=\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱$$

۱۱۵. گزینهٔ ۱

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow۱-\cos^۲\theta=\sin^۲\theta$$

$$(\frac{۱}{\cos\theta}-۱)(\frac{۱}{\cos\theta}+۱)\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}\frac{۱}{\cos^۲\theta}-۱=\frac{۱-\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=(\frac{\sin\theta}{\cos\theta})^۲=\tan^۲\theta$$

۱۱۶. گزینهٔ ۲

$$\frac{\sin\theta}{(\sin\theta)^{-۱}+۱}+\frac{\sin\theta}{(\sin\theta)^{-۱}-۱}=\frac{\sin\theta}{\frac{۱}{\sin\theta}+۱}+\frac{\sin\theta}{\frac{۱}{\sin\theta}-۱}=\frac{\sin\theta}{\frac{۱+\sin\theta}{\sin\theta}}+\frac{\sin\theta}{\frac{۱-\sin\theta}{\sin\theta}}=$$

$$\frac{\sin^۲\theta(۱-\sin\theta)}{(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta)}+\frac{\sin^۲\theta(۱+\sin\theta)}{(۱-\sin\theta)(۱+\sin\theta)}=\frac{\sin^۲\theta-\sin^۳\theta+\sin^۲\theta+\sin^۳\theta}{۱-\sin^۲\theta}=\frac{۲\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=۲\tan^۲\theta$$

۱۱۷. گزینهٔ ۴

$$(۱-\sin^۲\theta)(۱-\tan^۲\theta)=\cos^۲\theta(۱-\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta})=\cos^۲\theta-\sin^۲\theta=(۱-\sin^۲\theta)-\sin^۲\theta=۱-۲\sin^۲\theta$$

۱۱۸. گزینهٔ ۱

$$(\sin\theta+\cos\theta)^۲-۲\tan\theta\cos^۲\theta=(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta+۲\sin\theta\cos\theta)-(۲\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\cos^۲\theta)=$$

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta+۲\sin\theta\cos\theta-۲\sin\theta\cos\theta=\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$$

۱۱۹. گزینهٔ ۲

$$\left.\begin{matrix}\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\\ \sin^۲\alpha=\frac{۱}{۴}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\cos^۲\alpha=\frac{۳}{۴}\\ \sin^۲\alpha=\frac{۱}{۴}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \sin\alpha=\pm\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

چهار حالت داریم:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\begin{cases}\text{ناحیهٔ اول} \to \frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}>۰\\ \text{ناحیهٔ دوم} \to \frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}<۰\\ \text{ناحیهٔ سوم} \to -\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}<۰\\ \text{ناحیهٔ چهارم} \to -\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}>۰\end{cases}$$

پس در ناحیه‌های دوم یا سوم است.

۱۲۰. گزینهٔ ۴

$$\frac{۱}{\cos x}-\sin x\cdot\tan x<۰\Rightarrow\frac{۱}{\cos x}-\sin x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}<۰\Rightarrow\frac{۱-\sin^۲ x}{\cos x}<۰\Rightarrow\frac{\cos^۲ x}{\cos x}<۰\Rightarrow\cos x<۰$$

چون $\cos x<۰$، پس x در ناحیهٔ دوم یا سوم قرار دارد. پس داریم:

$$\left.\begin{aligned}\sin x+\tan x>۰\Rightarrow\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}>۰\Rightarrow\sin x(۱+\frac{۱}{\cos x})>۰\\ -۱<\cos x<۰\Rightarrow\frac{۱}{\cos x}<-۱\Rightarrow۱+\frac{۱}{\cos x}<۰\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sin x<۰$$

چون $\sin x<۰$، پس x در ناحیه‌های سوم یا چهارم قرار دارد.

با توجه به اشتراک دو جواب، x در ناحیهٔ سوم قرار دارد.

۱۲۱. گزینهٔ ۴

$$\frac{۱}{۱-\sin\theta}+\frac{۱}{۱+\sin\theta}-۲\tan^۲\theta=\frac{۱\times(۱+\sin\theta)}{(۱-\sin\theta)(۱+\sin\theta)}+\frac{۱\times(۱-\sin\theta)}{(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta)}-۲\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=$$

$$\frac{۱+\sin\theta}{۱-\sin^۲\theta}+\frac{۱-\sin\theta}{۱-\sin^۲\theta}-۲\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{۱+\sin\theta}{\cos^۲\theta}+\frac{۱-\sin\theta}{\cos^۲\theta}-\frac{۲\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{۲-۲\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{۲(۱-\sin^۲\theta)}{\cos^۲\theta}=\frac{۲\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta}=۲$$

۱۲۲. گزینهٔ ۴

$$(۱-\sin^۲\theta)(۱+\frac{۱}{\cos^۲\theta})-(۱-\cos\theta)^۲=\cos^۲\theta(۱+\frac{۱}{\cos^۲\theta})-(۱+\cos^۲\theta-۲\cos\theta)=$$

$$\cos^۲\theta+۱-(۱+\cos^۲\theta-۲\cos\theta)=\cos^۲\theta+۱-۱-\cos^۲\theta+۲\cos\theta=۲\cos\theta$$

۱۲۳. گزینهٔ ۴

$$۱=\sin^۲\theta+\cos^۲\theta\Rightarrow۱-\cos^۲\theta=\sin^۲\theta\Rightarrow(۱+\cos\theta)(۱-\cos\theta)=\sin\theta\sin\theta\Rightarrow$$

$$۱+\cos\theta=\frac{\sin\theta\sin\theta}{۱-\cos\theta}\Rightarrow\frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta}$$

۱۲۴. گزینهٔ ۱

$$\frac{\sin^۴ x+\cos^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}-(\tan x+\cot x)^۲=\frac{\sin^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}+\frac{\cos^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}-(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})^۲=$$

$$\cancel{\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}+\cancel{\frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x}}-(\cancel{\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}+\cancel{\frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x}}+۲\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\cos x}{\sin x})=-۲\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\cos x}{\sin x}=-۲$$

۱۲۵. گزینهٔ ۲

$$y=(\tan x+\cot x)^۲-\tan^۲ x-\cot^۲ x=\tan^۲ x+\cot^۲ x+۲\tan x\cot x-\tan^۲ x-\cot^۲ x=۲\tan x\cot x=۲$$

۱۲۶. گزینه ۱

$$\tan\theta\times\cot\theta=۱\Rightarrow(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)=۱\Rightarrow(\sqrt{x})^{۲}-۲^{۲}=۱\Rightarrow x-۴=۱\Rightarrow x=۵$$

۱۲۷. گزینه ۱

راه حل اول:

$$\tan x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\sin x=\frac{۳}{۴}\cos x$$

$$A=\frac{۴}{\cos x}-\frac{۳}{\sin x}=\frac{۴}{\cos x}-\frac{۳}{\frac{۳}{۴}\cos x}=\frac{۴}{\cos x}-\frac{۱}{\frac{\cos x}{۴}}=\frac{۴}{\cos x}-\frac{۴}{\cos x}=۰$$

راه حل دوم:

$$\tan x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{۴}{\cos x}=\frac{۳}{\sin x}\Rightarrow\frac{۴}{\cos x}-\frac{۳}{\sin x}=۰$$

۱۲۸. گزینه ۱

$$\frac{\sin x+۳\cos x}{\sin x-۳\cos x}=\frac{\frac{\sin x+۳\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x-۳\cos x}{\cos x}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{۳\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{۳\cos x}{\cos x}}=\frac{\tan x+۳}{\tan x-۳}=\frac{۵+۳}{۵-۳}=\frac{۸}{۲}=۴$$

۱۲۹. گزینه ۴

$$\sqrt{\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}}=\frac{۱}{\cos x}-\tan x\Rightarrow\sqrt{\frac{(۱-\sin x)(۱-\sin x)}{(۱+\sin x)(۱-\sin x)}}=\frac{۱}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow\sqrt{\frac{(۱-\sin x)^{۲}}{۱-\sin^{۲}x}}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{(۱-\sin x)^{۲}}{\cos^{۲}x}}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}\Rightarrow\frac{|۱-\sin x|}{|\cos x|}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}\xrightarrow{\sin x<۱}\frac{۱-\sin x}{|\cos x|}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}$$

$\Rightarrow|\cos x|=\cos x\Rightarrow ۰<\cos x\Rightarrow$ x در ناحیهٔ اول یا چهارم است.

۱۳۰. گزینه ۴

طبق فرض : $\sqrt{۱+m\tan x}=\frac{۱}{\cos x}\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}}۱+m\tan x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}$

چون $\frac{۱}{\cos^{۲}x}=۱+\tan^{۲}x$ پس: $۱+m\tan x=۱+\tan^{۲}x\Rightarrow m\tan x=\tan^{۲}x\Rightarrow\tan x=m$

چون انتهای کمان x در ربع چهارم است و در ربع چهارم $\tan x<۰$ می‌باشد پس: $m<۰$ است.

۱۳۱. گزینه ۴

$$\frac{۲\cos x}{\sin x+۳\cos x}=۲\Rightarrow۲\cos x=۲(\sin x+۳\cos x)\Rightarrow۲\cos x=۲\sin x+۶\cos x\Rightarrow$$

$$-۴\cos x=۲\sin x\Rightarrow\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{۲}{-۴}\Rightarrow\cot x=-\frac{۱}{۲}$$

۱۳۲. گزینه ۴

$$\cos x=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\sin^{۲}x+\cos^{۲}x=۱\Rightarrow\sin^{۲}x+(\frac{\sqrt{۵}}{۳})^{۲}=۱\Rightarrow\sin^{۲}x+\frac{۵}{۹}=۱\Rightarrow\sin^{۲}x=\frac{۴}{۹}\xrightarrow{۰<x<۹۰^{\circ}}\sin x=\sqrt{\frac{۴}{۹}}=\frac{۲}{۳}$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{\sqrt{۵}}{۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

۱۳۳. گزینه ۴

$$\sin\alpha = k$$
$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = 1-k^2 \xrightarrow{0<\alpha<90^\circ} \cos\alpha = \sqrt{1-k^2}$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$$

۱۳۴. گزینه ۴

$$\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}} = \frac{\sin\theta\times\cos^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta\times\cos\theta$$

۱۳۵. گزینه ۲

$$(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta) = \cos^2\theta\times\frac{1}{\cos^2\theta} = 1$$

۱۳۶. گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l}\cot x<0 \Rightarrow \text{ناحیهٔ دوم یا چهارم}\\ \sin x>0 \Rightarrow \text{ناحیهٔ اول یا دوم}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ناحیهٔ دوم} \Rightarrow \cos x<0$$
$$\cot x = -2 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1+(-\frac{1}{2})^2 = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5} \xrightarrow{\cos x<0} \cos x = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۱۳۷. گزینه ۱

$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$
$$\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1 \Rightarrow (\frac{3}{5})^2+\cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1-\frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\cos\theta<0} \cos\theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$
$$\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta+1}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}+1}{-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{-\frac{4}{5}} = -2$$

۱۳۸. گزینه ۱

$$\frac{\sin x+2\cos x}{2\sin x-\cos x} = 2 \Rightarrow \sin x+2\cos x = 2(2\sin x-\cos x) \Rightarrow \sin x+2\cos x = 4\sin x-2\cos x \Rightarrow$$
$$4\cos x = 3\sin x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases}\cot x = \frac{3}{4}\\ \tan x = \frac{4}{3}\end{cases}$$

چون $\tan x>0$، می‌فهمیم x یا در ناحیهٔ اول یا در ناحیهٔ سوم قرار دارد. سپس به کمک اتحادها داریم:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1+\cot^2 x \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = 1+(\frac{3}{4})^2 = 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = \pm\frac{5}{4}$$
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1+(\frac{4}{3})^2 = 1+\frac{16}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \pm\frac{5}{3}$$

چون x در ناحیه‌های اول یا سوم قرار دارد، پس $\sin x$ و $\cos x$ هم‌علامت هستند. پس داریم:

$$\frac{1}{\sin x\times\cos x} = \frac{1}{\sin x}\times\frac{1}{\cos x} = \frac{5}{4}\times\frac{5}{3} = \frac{25}{12}$$

۱۳۹. گزینه ۴

فرض می‌کنیم $a = \tan x$، سپس یک «معادلهٔ گویا» حل می‌کنیم:

$$\tan x = a \Rightarrow \cot x = \frac{۱}{a}$$

$$\tan x - ۳\cot x = ۲ \Rightarrow a - \frac{۳}{a} = ۲ \xrightarrow{\times a} a^۲ - ۳ = ۲a \Rightarrow a^۲ - ۲a - ۳ = ۰ \Rightarrow (a-۳)(a+۱) = ۰ \Rightarrow a = ۳ \text{ یا } a = -۱$$

$$\Rightarrow \tan x = ۳ \text{ یا } \tan x = -۱$$

کمان x در ناحیهٔ سوم است، پس $\tan x > ۰$، در نتیجه $\tan x = ۳$.

مقدار $\cos x$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱ + \tan^۲ x \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱ + ۳^۲ = ۱۰ \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

چون در ناحیهٔ سوم است، پس $\cos x = \frac{-۱}{\sqrt{۱۰}}$.

۱۴۰. گزینه ۴

$$x = \frac{۲}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۱}{\sin \alpha}$$

$$y = ۳\cot \alpha \Rightarrow \frac{y}{۳} = \cot \alpha$$

$$\frac{۱}{\sin^۲ \alpha} = ۱ + \cot^۲ \alpha \Rightarrow (\frac{x}{۲})^۲ = ۱ + (\frac{y}{۳})^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴} = ۱ + \frac{y^۲}{۹} \Rightarrow ۹x^۲ = ۳۶ + ۴y^۲$$

۱۴۱. گزینه ۴

ابتدا $\sin^۲ \theta$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin^۲ \theta + \cos^۲ \theta = ۱ \Rightarrow \sin^۲ \theta + (\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲ = ۱ \Rightarrow \sin^۲ \theta + \frac{۱}{۳} = ۱ \Rightarrow \sin^۲ \theta = \frac{۲}{۳}$$

همچنین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \sin^۴ \theta - \cos^۴ \theta = (\sin^۲ \theta - \cos^۲ \theta)\underbrace{(\sin^۲ \theta + \cos^۲ \theta)}_{۱} = \sin^۲ \theta - \cos^۲ \theta \\ ۱ + \tan^۲ \theta = \frac{۱}{\cos^۲ \theta} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\sin^۴ \theta - \cos^۴ \theta + \frac{۱}{۱ + \tan^۲ \theta} = \sin^۲ \theta - \cos^۲ \theta + \frac{۱}{\frac{۱}{\cos^۲ \theta}} = \sin^۲ \theta - \cos^۲ \theta + \cos^۲ \theta = \sin^۲ \theta = \frac{۲}{۳}$$

۱۴۲. گزینه ۴

راه حل اول:

$$\frac{۱}{\cos^۴ x} + \frac{A}{\cos^۲ x} = \tan^۴ x - ۱ \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۴ x} + \frac{A}{\cos^۲ x} = \frac{\sin^۴ x}{\cos^۴ x} - ۱ \xrightarrow{\times \cos^۴ x} ۱ + A\cos^۲ x = \sin^۴ x - \cos^۴ x \Rightarrow$$

$$۱ + A\cos^۲ x = (\sin^۲ x - \cos^۲ x)(\sin^۲ x + \cos^۲ x) \Rightarrow ۱ + A\cos^۲ x = \sin^۲ x - \cos^۲ x \Rightarrow (۱ - \sin^۲ x) + A\cos^۲ x = -\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow \cos^۲ x + A\cos^۲ x = -\cos^۲ x \Rightarrow \cos^۲ x(۱ + A) = -\cos^۲ x \Rightarrow ۱ + A = -۱ \Rightarrow A = -۲$$

راه حل دوم: یک اتحاد به ازای همهٔ مقدارهای تعریف شدهٔ x برقرار است. پس به ازای $x = ۰$ نیز برقرار است.

$$x = ۰ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin^۲ x = ۰ \\ \tan^۴ x = ۰ \\ \cos^۲ x = \cos^۴ x = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{۱} + \frac{A}{۱} = ۰ - ۱ \Rightarrow ۱ + A = -۱ \Rightarrow A = -۲$$

۱۴۳. گزینه ۲

با قرار دادن مقادیر مختلف دلخواه برای x در تساوی داده شده به راحتی می‌توانیم پارامترهای A و B را تعیین کنیم به صورت زیر:

$$\text{اگر } x=90^\circ \Rightarrow \cos^4(90^\circ)=A\cos^4(90^\circ)-B\cos^2(90^\circ)+\frac{A}{B} \Rightarrow 1=0-0+\frac{A}{B} \Rightarrow A=B$$

$$\text{اگر } x=45^\circ \Rightarrow \cos^4(45^\circ)=A\cos^4(45^\circ)-B\cos^2(45^\circ)+\frac{A}{B} \Rightarrow -1=\frac{A}{4}-\frac{B}{2}+\frac{A}{B} \Rightarrow \frac{A}{4}-\frac{B}{2}=-1-\frac{A}{B}$$

$$\xrightarrow[A=B]{\text{چون}} \frac{A}{4}-\frac{A}{2}=-2 \Rightarrow -\frac{A}{4}=-2 \Rightarrow A=8 \Rightarrow B=8 \Rightarrow 3A-B=16$$

۱۴۴. گزینه ۴

$$\cot\theta=\frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta}=1+\cot^2\theta \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\theta}=1+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\theta}=1+\frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab}=\frac{a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{2a^2+2b^2}{(a+b)^2} \Rightarrow \sin^2\theta=\frac{(a+b)^2}{2a^2+2b^2} \xrightarrow{0<\sin\theta} \sin\theta=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2a^2+2b^2}} \Rightarrow$$

$$\sin\theta=\frac{|a+b|}{\sqrt{2a^2+2b^2}} \xrightarrow{a>b>0} \sin\theta=\frac{a+b}{\sqrt{2a^2+2b^2}} \Rightarrow \sin\theta=\frac{a+b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$$

۱۴۵. گزینه ۲

$$\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x \Rightarrow \frac{1}{(\frac{1}{b})^2}=1+(a+2)^2 \Rightarrow b^2=1+(a+2)^2$$

۱۴۶. گزینه ۴

$$\cot x=\frac{1}{\tan x} \Rightarrow \cot x=\frac{1}{\frac{2ab}{a^2-b^2}}=\frac{a^2-b^2}{2ab}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x}=1+\left(\frac{a^2-b^2}{2ab}\right)^2=1+\frac{a^4+b^4-2a^2b^2}{4a^2b^2}=\frac{a^4+b^4+2a^2b^2}{4a^2b^2} \Rightarrow \sin^2 x=\frac{4a^2b^2}{a^4+b^4+2a^2b^2}$$

$$=\frac{(2ab)^2}{(a^2+b^2)^2} \xrightarrow{\sin x>0} \sin x=\sqrt{\frac{(2ab)^2}{(a^2+b^2)^2}} \Rightarrow \sin x=\frac{|2ab|}{|(a^2+b^2)|} \xrightarrow{a>b>0} \sin x=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

۱۴۷. گزینه ۴

نکته به کمک اتحاد $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ می‌توان نوشت:

$$\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2\cos^2 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=1 \Rightarrow$$

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$$

پس می‌نویسیم:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow (\sin^2 x+\cos^2 x)^2=1 \Rightarrow \sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x=1 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4}+2\sin^2 x\cos^2 x=1 \Rightarrow 2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{8}$$

۱۴۸. گزینه ۴

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x \quad (*)$$

$$\frac{(۱-۲\sin x\cos x)(۱+۲\sin x\cos x)+۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{\sin^۴ x+\cos^۴ x}=\frac{۱-۴\sin^۲ x\cos^۲ x+۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{\sin^۴ x+\cos^۴ x}=$$

$$\frac{۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{\sin^۴ x+\cos^۴ x}\overset{*}{=}\frac{۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x}=۱$$

۱۴۹. گزینه ۱

نکته اگر مقدار $\sin x+\cos x$ را داشته باشیم، می‌توان مقدار $\sin x\cos x$ را به‌دست آورد:

$$\sin x+\cos x=a\Rightarrow(\sin x+\cos x)^۲=a^۲\Rightarrow\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x=a^۲\Rightarrow$$

$$۱+۲\sin x\cos x=a^۲\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{a^۲-۱}{۲}$$

$$\sin x+\cos x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow(\sin x+\cos x)^۲=(\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۱}{۹}\Rightarrow\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۹}\Rightarrow$$

$$۱+۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۹}\Rightarrow۲\sin x\cos x=-\frac{۸}{۹}\Rightarrow\sin x\cos x=-\frac{۴}{۹}$$

سپس به کمک اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\sin^۳ x+\cos^۳ x=(\sin x+\cos x)(\sin^۲ x+\cos^۲ x-\sin x\cos x)=\frac{۱}{۳}\times\left(۱-(-\frac{۴}{۹})\right)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۳}{۹}=\frac{۱۳}{۲۷}$$

۱۵۰. گزینه ۴

$$\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱\Rightarrow(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲=۱\Rightarrow\sin^۴ x+\cos^۴ x+۲\sin^۲ x\cos^۲ x=۱\Rightarrow$$

$$\frac{۳}{۵}+۲\sin^۲ x\cos^۲ x=۱\Rightarrow۲\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۱}{۵}$$

سپس به کمک اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$a^۶+b^۶=(a^۲+b^۲)(a^۴+b^۴-a^۲b^۲)\Rightarrow$$

$$\sin^۶ x+\cos^۶ x=(\sin^۲ x+\cos^۲ x)(\sin^۴ x+\cos^۴ x-\sin^۲ x\cos^۲ x)=۱\times(\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۵})=\frac{۲}{۵}$$

۱۵۱. گزینه ۴

نکته

$$a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$$

$$\sin^۶ x+\cos^۶ x=(\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱})^۳-۳\sin^۲ x\cos^۲ x(\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱})=۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x$$

به کمک نکتهٔ گفته شده داریم:

$$a^۲-b^۲=(a-b)(a+b)\Rightarrow۱-b^۲=(۱-b)(۱+b)$$

$$\frac{۱-(۳\sin^۲ x\cos^۲ x)^۲}{\sin^۶ x+\cos^۶ x}=\frac{(۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x)(۱+۳\sin^۲ x\cos^۲ x)}{۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x}=۱+۳\sin^۲ x\cos^۲ x$$

۱۵۲. گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha\le۱\\ \sin\beta\le۱\\ \sin\alpha+\sin\beta=۲\end{array}\right\}\Rightarrow\sin\alpha=\sin\beta=۱$$

$$\sin\beta=۱\Rightarrow\cos\beta=۰$$

$$\sin^۴\alpha+\cos^۳\beta=۱^۴+۰^۳=۱$$

۱۵۳. گزینه ۴

مقدار سینوس هر زاویه‌ای بین ۱ و ۱− است. پس ماکزیمم مقدار سینوس هر زاویه ۱ است. پس می‌توان نوشت:

$$x=y=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin ۱۸۰^\circ\times x+\sin ۱۸۰^\circ\times y=\sin ۹۰^\circ+\sin ۹۰^\circ=۱+۱=۲$$

۱۵۴. گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l}\sin(x+y)\le ۱\\ \sin(۲x-y+۳۰^\circ)\le ۱\\ \sin(x+y)+\sin(۲x-y+۳۰^\circ)=۲\end{array}\right\}\Rightarrow \sin(x+y)=\sin(۲x-y+۳۰^\circ)=۱\Rightarrow \begin{cases}x+y=۹۰^\circ\\ ۲x-y+۳۰^\circ=۹۰^\circ\end{cases}$$

دستگاه دو معادله و دو مجهول را حل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}x+y=۹۰^\circ\\ ۲x-y+۳۰^\circ=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+y=۹۰^\circ\\ ۲x-y=۶۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow x=۵۰^\circ\ ,\ y=۴۰^\circ\Rightarrow x+۲y=۵۰^\circ+۲\times ۴۰^\circ=۱۳۰^\circ$$

۱۵۵. گزینه ۴

$$-۱\le \sin x\le ۱\Rightarrow -۵\le ۵\sin x\le ۵\Rightarrow -۸\le ۵\sin x-۳\le ۲\Rightarrow |۵\sin x-۳|\le ۸$$

$$x=-۹۰^\circ\Rightarrow |۵\sin x-۳|=|۵\sin(-۹۰^\circ)-۳|=|۵\times(-۱)-۳|=|-۵-۳|=|-۸|=۸$$

۱۵۶. گزینه ۴

$$x^۲-۴x+۵=x^۲-۴x+۴+۱=(x-۲)^۲+۱$$

پس مینیمم مقدار $x^۲-۴x+۵$ برابر با ۱ است (زیرا $(x-۲)^۲$ همواره مثبت است)، این مقدار مینیمم به ازای $x=۲$ است.

از طرفی ماکزیممم مقدار $\sin a$ برابر با ۱ است. پس می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}۱\le x^۲-۴x+۵\\ \sin a\le ۱\end{array}\right\}\Rightarrow \sin a=x^۲-۴x+۵=۱\Rightarrow (x-۲)^۲+۱=۱\Rightarrow x-۲=۰\Rightarrow x=۲$$

۱۵۷. گزینه ۱

$$\sin x+\cos x=-\sqrt{۲}\Rightarrow (\sin x+\cos x)^۲=(-\sqrt{۲})^۲\Rightarrow \underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}+۲\sin x\cos x=۲\Rightarrow ۲\sin x\cos x=۱$$

پس داریم:

$$\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}-\underbrace{۲\sin x\cos x}_{۱}=۰\Rightarrow (\sin x-\cos x)^۲=۰\Rightarrow \sin x=\cos x$$

بنابراین یک دستگاه دو معادله و دو مجهول تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}\sin x+\cos x=-\sqrt{۲}\\ \sin x=\cos x\end{cases}\Rightarrow \sin x=\cos x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \sin^۳ x+\cos^۵ x=(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۳+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۵=-\frac{\sqrt{۲}}{۴}-\frac{\sqrt{۲}}{۸}=-\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$$

۱۵۸. گزینه ۲

نکته

$$\left.\begin{array}{l}a<۰\Rightarrow a+\frac{۱}{a}\le -۲\\ a>۰\Rightarrow ۲\le a+\frac{۱}{a}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\tan x<۰\Rightarrow \tan x+\frac{۱}{\tan x}\le -۲\\ \text{یا}\\ \tan x>۰\Rightarrow ۲\le \tan x+\frac{۱}{\tan x}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\tan x+\cot x\le -۲\quad (\tan x<۰)\\ \text{یا}\\ \tan x+\cot x\ge ۲\quad (\tan x>۰)\end{array}\right.$$

بنابراین داریم:

$$k-۱\le -۲\Rightarrow k\le -۱$$
$$k-۱\ge ۲\Rightarrow k\ge ۳$$

۱۵۹. گزینه ۱

با توجه به نکتهٔ مثال قبل داریم: $\tan x + \cot x \leq -۲$ یا $\tan x + \cot x \geq ۲$

پس هیچ مقداری برای x وجود ندارد که $-۲ < \tan x + \cot x < ۲$ شود. به عبارتی هیچ مقداری برای x وجود ندارد که $\tan x + \cot x = \sqrt{۳}$. زیرا $-۲ < \sqrt{۳} < ۲$ است.

۱۶۰. گزینه ۱

فرض می‌کنیم $\tan x = a$، پس:

$$\cot x = \frac{۱}{\tan x} = \frac{۱}{a}$$

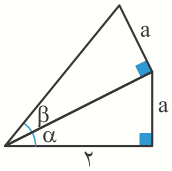
$$\tan x + \cot x = a + \frac{۱}{a} = -۲ \Rightarrow (a + \frac{۱}{a})a = -۲a \Rightarrow a^۲ + ۱ = -۲a \Rightarrow a^۲ + ۱ + ۲a = ۰ \Rightarrow (a+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow$$

$$a = -۱ \Rightarrow \tan x = -۱ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} ۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} \xrightarrow{\tan x = -۱} ۱ + (-۱)^۲ = \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow ۲ = \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۱}{۲} \\ \sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۲}$$

$$\sin^۶ x + \cos^۴ x = (\sin^۲ x)^۳ + (\cos^۲ x)^۲ = (\frac{۱}{۲})^۳ + (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۸}$$

۱. در شکل زیر، مقدار $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ کدام است؟



۱) $\sqrt{۴+a^۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۴+a^۲}}{۲}$
۳) $\sqrt{a^۲+۱}$
۴) $\frac{۱}{\sqrt{a^۲+۱}}$

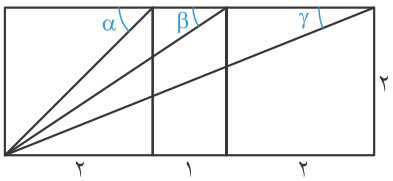
۲. اگر $\sin x = ۳m+۱$ باشد، کدام نابرابری درست است؟

۱) $-۲\le m\le ۰$
۲) $-۱\le m\le ۲$
۳) $-\frac{۲}{۳}\le m\le ۰$
۴) $۰\le m\le ۲$

۳. در مثلث ABC اگر $\hat{C}=۱۰۵^\circ$ و $\sin ۲\hat{A}=\sin ۳\hat{B}$ باشد آن‌گاه زاویه A چند درجه است؟

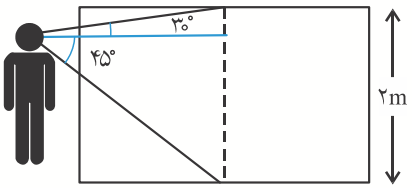
۱) ۴۵°
۲) ۶۰°
۳) ۲۰°
۴) ۳۰°

۴. با توجه به شکل، مقدار عبارت $\sin\alpha+۳\cos\beta-۲\tan\gamma$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۹\sqrt{۱۳}}{۱۳}-\frac{۴}{۵}$
۲) $\frac{۸}{۳}-\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۲}{۵}$

۵. مطابق شکل زیر شخصی مقابل یک تابلوی نقاشی ۲ متری ایستاده است. اگر آن شخص سر خود را تکان ندهد بالای تابلو را تحت زاویهٔ ۳۰° و پایین آن را تحت زاویهٔ ۴۵° می‌بیند. فاصلهٔ آن شخص تا تابلو چند متر است؟



۱) $۵-\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۳}-۱$
۳) $۳-\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۵}-۱$

۶. هواپیمایی می‌خواهد از روی یک باند به طول ۳ کیلومتر بلند شود. ابتدا ۱۸۰۰ متر روی باند حرکت می‌کند تا سرعت لازم را پیدا کند. سپس با زاویهٔ θ از روی باند بلند می‌شود. وقتی به انتهای بالای باند می‌رسد ۸۰۰ متر ارتفاع دارد. برای زاویهٔ θ کدام درست است؟

۱) $\cos\theta=\frac{۲}{۳}$
۲) $\sin\theta=\frac{۲}{۳}$
۳) $\cot\theta=\frac{۲}{۳}$
۴) $\tan\theta=\frac{۲}{۳}$

۷. در مثلث ABC نقاط D و E به ترتیب روی اضلاع AB و AC قرار دارند به‌طوری که $\frac{DA}{DB}=\frac{۲}{۳}$ و $\frac{EA}{EC}=\frac{۳}{۵}$، مساحت مثلث ADE چند درصد مساحت مثلث ABC است؟

۱) ۱۵
۲) ۱۸
۳) ۲۱
۴) ۲۴

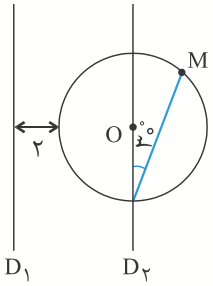
۸. اگر $۹۰^\circ<x<۱۸۰^\circ$، مقدار عبارت $\frac{۷}{۲}\cos(-۲x)$ در چه بازه‌ای قرار می‌گیرد؟

۱) $[-\frac{۷}{۲},\frac{۷}{۲}]$
۲) $[-\frac{۷}{۲},۰)$
۳) $(-\frac{۷}{۲},\frac{۷}{۲})$
۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$

۹. کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\sin ۵۰^\circ<\sin ۴۰^\circ$
۲) $\cos ۵۰^\circ<\cos ۴۰^\circ$
۳) $\tan ۵۰^\circ<\tan ۴۰^\circ$
۴) $\cot ۴۰^\circ<\cot ۵۰^\circ$

۱۰. در شکل مقابل خطوط D_1 و D_2 موازی و مرکز دایره به شعاع ۳ واحد بر روی خط D_2 قرار دارد. فاصلهٔ نقطهٔ M از خط D_1 چه‌قدر است؟



۱) $5+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۲) $5+\sqrt{3}$ ۳) $5+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{13}{2}$

۱۱. اگر $-20^\circ < x < 30^\circ$ و $\cos 2x = \frac{2m-3}{2}$، مجموعهٔ تمام مقادیر m در کدام بازه است؟

۱) $[2, 2/5)$ ۲) $(2, 2/5]$ ۳) $(\frac{1}{2}, 1]$ ۴) $[\frac{1}{2}, 1)$

۱۲. اگر $\sin(\frac{180^\circ \cos x}{6}) = a$ باشد، کدام بازهٔ زیر حدود تغییرات a را نشان می‌دهد؟

۱) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ۲) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ۳) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ۴) $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

۱۳. حاصل عددی $\cos 157/5^\circ + \cos 135^\circ + \cos 112/5^\circ + \cos 90^\circ + \cos 67/5^\circ + \cos 45^\circ + \cos 22/5^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) صفر ۴) ۱

۱۴. اگر $210^\circ \le x \le 330^\circ$ باشد، بیش‌ترین مقدار $\cot x - \frac{1+\cos x}{\sin x}$ چه‌قدر است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

۱۵. زاویهٔ بین خط $d: \sqrt{3}y = x + 1$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم چقدر است؟

۱) 75° ۲) 45° ۳) 135° ۴) 15°

۱۶. اگر $\cot x = 2$ حاصل $A = \frac{\cos^4 x}{3 + \sin^2 x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{3}{10}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۱۷. اگر $(a \in \mathbb{R})$; $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}}$، انتهای کمان x در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۸. سادهٔ شدهٔ عبارت $\frac{\tan^4 x - \sin^4 x}{\sin^4 x - 3\sin^2 x + 2}$ کدام است؟

۱) $\tan^2 x$ ۲) $\tan^4 x$ ۳) $\tan^6 x$ ۴) $\tan^8 x$

۱۹. اگر $270^\circ < \alpha < 315^\circ$، حاصل عبارت $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\cot\alpha) + \cos^2\alpha(1+\tan\alpha)}$ کدام است؟

۱) $\cos\alpha - \sin\alpha$ ۲) $-\sin\alpha - \cos\alpha$ ۳) $\sin\alpha + \cos\alpha$ ۴) $\sin\alpha - \cos\alpha$

۲۰. اگر $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$ باشد حاصل $\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}$ چه‌قدر است؟

۱) $5\sqrt{\frac{2}{7}}$ ۲) $3\sqrt{\frac{2}{7}}$ ۳) $4\sqrt{\frac{2}{7}}$ ۴) $\frac{18}{7}$

۲۱. اگر $\cos x\sqrt{1+\tan^2 x} > \sqrt{1+2\sin x\cos x}$ آن‌گاه انتهای کمان x در کدام ناحیه است؟ (کنکور سراسری)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲۲. در صورتی که $\frac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \frac{3}{2}$، مقدار $\tan\theta$ برابر کدام است؟ (کنکور)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۳. اگر $\tan x = -\frac{۱}{۲}$ و $\cos x < ۰$، مقدار $\sin x$ کدام است؟ (کنکور)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

۲۴. اگر $\tan a = -\frac{۱}{۳}$ و انتهای زاویهٔ a در موقعیت استاندارد در ربع چهارم مثلثاتی باشد، مختصات محل برخورد ضلع انتهای زاویه با دایرهٔ مثلثاتی کدام است؟

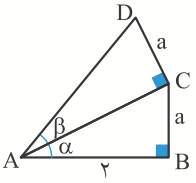
۱) $(۱, -۳)$ ۲) $(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}, -\frac{۳}{\sqrt{۱۰}})$ ۳) $(۱, -\frac{۱}{۳})$ ۴) $(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}, -\frac{۱}{\sqrt{۱۰}})$

۲۵. اگر $\sin x + \frac{۱}{\sin x} = ۲$ باشد، آنگاه مقدار عبارت $\sin^۲ x + \cos^۵ x$ چقدر است؟ (کنکور)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $۲ - \sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲} - ۱$

آزمون فصل ۲ — پاسخ‌نامه — مثلثات

۱. گزینه ۳



$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۲^۲ + a^۲ = ۴ + a^۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۴ + a^۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tan\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{۲} \\ \tan\beta = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{a}{\sqrt{۴ + a^۲}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\frac{a}{۲}}{\frac{a}{\sqrt{۴ + a^۲}}} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{\sqrt{۴ + a^۲}}} = \frac{\sqrt{۴ + a^۲}}{۲}$$

۲. گزینه ۴

نکته برای مقدار سینوس هر زاویه‌ای می‌دانیم: $-۱ \le \sin x \le ۱$

$$-۱ \le ۳m + ۱ \le ۱ \Rightarrow -۱ - ۱ \le ۳m + ۱ - ۱ \le ۱ - ۱ \Rightarrow -۲ \le ۳m \le ۰ \Rightarrow -\frac{۲}{۳} \le m \le ۰$$

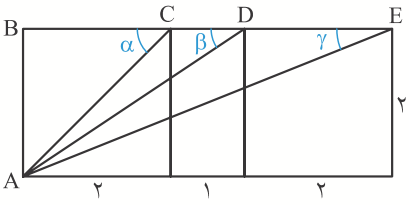
۳. گزینه ۱

طبق فرض : $\sin ۲\hat{A} = \sin ۳\hat{B} \Rightarrow ۲\hat{A} = ۳\hat{B}$ (۱)

از طرفی : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{C} = ۱۰۵^\circ} \hat{A} + \hat{B} = ۷۵$ (۲)

از (۱) و (۲) $\Rightarrow \hat{A} + \frac{۲}{۳}\hat{A} = ۷۵ \Rightarrow \frac{۵\hat{A}}{۳} = ۷۵ \Rightarrow \hat{A} = ۴۵^\circ$

۴. گزینه ۱



$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = ۲^۲ + ۲^۲ = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow AC = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

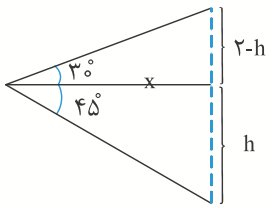
$$AD^۲ = AB^۲ + BD^۲ = ۲^۲ + ۳^۲ = ۴ + ۹ = ۱۳ \Rightarrow AD = \sqrt{۱۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{۲}{۲\sqrt{۲}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \cos\beta = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{۳}{\sqrt{۱۳}} = \dfrac{۳\sqrt{۱۳}}{۱۳} \\ \tan\gamma = \dfrac{AB}{BE} = \dfrac{۲}{۵} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\sin\alpha + ۳\cos\beta - ۲\tan\gamma = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{۹\sqrt{۱۳}}{۱۳} - \frac{۴}{۵}$$

۵. گزینه ۴

مطابق شکل مقابل داریم:



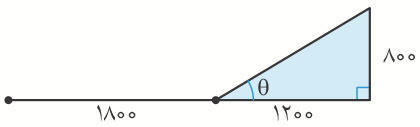
$$\tan ۴۵^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow ۱ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \quad (۱)$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{۲-h}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۲-h}{x} \Rightarrow ۲ - h = \frac{x\sqrt{۳}}{۳} \quad (۲)$$

از جمع طرفین روابط (۱) و (۲) داریم:

$$۲ = x + x\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow x\left(۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۳}\right) = ۲ \Rightarrow x = \frac{۲}{۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۳}} = \frac{۶}{۳ + \sqrt{۳}} = \frac{۶(۳ - \sqrt{۳})}{۹ - ۳} = ۳ - \sqrt{۳}$$

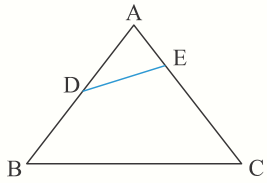
۶. گزینه ۴



$$\tan\theta = \frac{۸۰۰}{۱۲۰۰} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$$

۷. گزینه ۱

با توجه به مفروضات مسأله شکل مقابل را رسم می‌کنیم و داریم:



$$\frac{DA}{DB}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow AD=\frac{۲}{۵}AB \quad (۱)$$

$$\frac{EA}{EC}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow AE=\frac{۳}{۸}AC \quad (۲)$$

از طرفی دو مثلث $\overset{\Delta}{ADE}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ در زاویه $\hat{A}$ مشترک هستند پس مساحت دو مثلث را با اضلاع مجاور به زاویه مشترک می‌نویسیم یعنی:

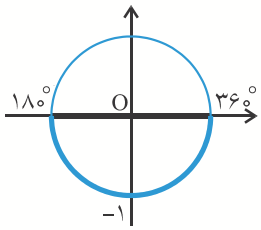
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times AD\times AE\times\sin\hat{A}}{\frac{۱}{۲}\times AB\times AC\times\sin\hat{A}}\xrightarrow[(۲),(۱)]{\text{طبق}}\frac{\frac{۲}{۵}AB\times\frac{۳}{۸}AC}{AB\times AC}=\frac{۳}{۲۰}=\frac{۱۵}{۱۰۰}$$

۸. گزینه ۴

$$۹۰^\circ<x<۱۸۰^\circ\Rightarrow ۱۸۰^\circ<۲x<۳۶۰^\circ$$

$$\cos\theta=\cos(-\theta)\Rightarrow\cos ۲x=\cos(-۲x)\Rightarrow\frac{۷}{۲}\cos ۲x=\frac{۷}{۲}\cos(-۲x)$$

محدودهٔ $۲x$ را روی دایرهٔ مثلثاتی می‌بینیم:



پس داریم:

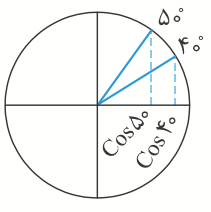
$$-۱<\cos ۲x<۱\xrightarrow{\cos ۲x=\cos(-۲x)}-۱<\cos(-۲x)<۱\Rightarrow$$

$$-\frac{۷}{۲}<\frac{۷}{۲}\cos(-۲x)<\frac{۷}{۲}\rightarrow(-\frac{۷}{۲},\frac{۷}{۲})$$

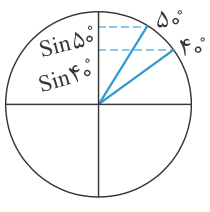
۹. گزینه ۲

می‌دانیم در ناحیه اول مثلثاتی با افزایش مقدار زاویه حاده α، $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ افزایش ولی $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ کاهش می‌یابند به بیان دیگر در ناحیه اول برای زاویه حاده α توابع $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ صعودی و توابع $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ نزولی‌اند پس در این سؤال چون $۵۰^\circ>۴۰^\circ$ می‌توان نتیجه گرفت $\cos ۵۰^\circ<\cos ۴۰^\circ$ است و گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

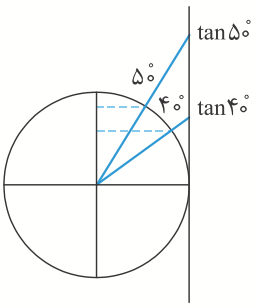
این مطلب را در شکل‌های زیر نیز می‌توان مشاهده کرد:



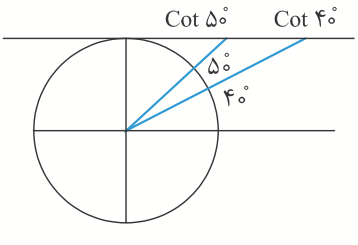
$\cos ۵۰^\circ<\cos ۴۰^\circ$



$\sin ۵۰^\circ>\sin ۴۰^\circ$



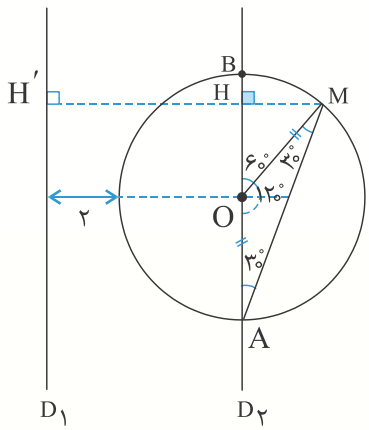
$\tan ۵۰^\circ>\tan ۴۰^\circ$



$\cot ۵۰^\circ<\cot ۴۰^\circ$

۱۰. گزینه ۱

با توجه به شکل مقابل چون زاویه $\widehat{BAM}=30^\circ$ است لذا $\widehat{BOM}=60^\circ$ می‌باشد. همچنین در مثلث قائم‌الزاویه OMH داریم:



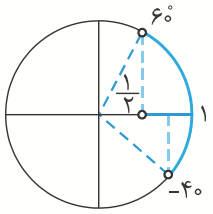
$$\sin 60^\circ=\frac{MH}{OM}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{MH}{3}\Rightarrow MH=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

پس فاصله نقطهٔ M از خط D_1 با توجه به موازی بودن دو خط D_1 , D_2 برابر است با:

$$MH'=MH+HH'=MH+(R+2)\xrightarrow{R=3}\frac{3\sqrt{3}}{2}+5$$

۱۱. گزینه ۳

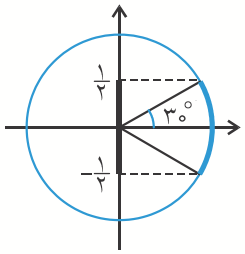
طبق فرض : $-20^\circ<x<30^\circ\Rightarrow-40^\circ<2x<60^\circ$



مطابق شکل مقابل می‌بینیم هرگاه $2x$ از -40°درجه تا 60° تغییر کند مقدار $\cos 2x$ از $\frac{1}{2}$ تا ۱ تغییر می‌کند البته $\cos 2x$ مقدار ۱ را می‌تواند داشته باشد ولی مقدار $\frac{1}{2}$ را نمی‌تواند اختیار کند به بیان دیگر $\frac{1}{2}<\cos 2x\le 1$ است. در این‌جا نیازی به دانستن مقدار $\cos(-40^\circ)$ نیست چون $\cos 60^\circ<\cos(-40^\circ)$. پس با توجه به این‌که $\cos 2x=\frac{2m-3}{2}$ است داریم:

$$\frac{1}{2}<\frac{2m-3}{2}\le 1\Rightarrow 1<2m-3\le 2\Rightarrow 4<2m\le 5\Rightarrow 2<m\le 2/5$$

۱۲. گزینه ۳



$$-1\le\cos x\le 1\Rightarrow -30^\circ\le\frac{180^\circ\cos x}{6}\le 30^\circ$$

اگر فرض کنیم $\alpha=\frac{180^\circ\cos x}{6}$، محدودهٔ α به‌صورت رنگی و پُررنگ در شکل مشخص شده است. پس $-\frac{1}{2}\le\sin\alpha\le\frac{1}{2}$.

۱۳. گزینه ۴

$$\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ$$
$$\cos 90^\circ=0$$
$$\cos 157/5^\circ=\cos(180^\circ-22/5^\circ)=-\cos 22/5^\circ$$
$$\cos 112/5^\circ=\cos(180^\circ-67/5^\circ)=-\cos 67/5^\circ$$

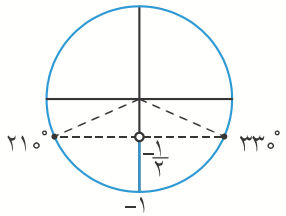
پس حاصل عبارت خواسته شده برابر ۰ است.

۱۴. گزینه ۴

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\cot x-\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{\cos x-1-\cos x}{\sin x}=-\frac{1}{\sin x}$$

سپس با توجه به این‌که $210^\circ<x\le 330^\circ$ است باید محدودهٔ تغییرات $\frac{-1}{\sin x}$ را به‌دست آوریم.



همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینیم وقتی x در بازه $[210^\circ, 330^\circ]$ تغییر می‌کند مقدار sinx در بازه $[-1, \frac{-1}{2}]$ است.

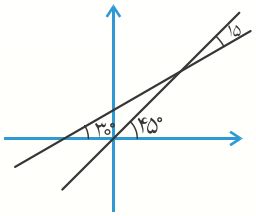
پس:

$$-1\le\sin x\le-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\le-\sin x\le 1\Rightarrow 1\le\frac{1}{-\sin x}\le 2\Rightarrow\max\left(-\frac{1}{\sin x}\right)=2$$

۱۵. گزینه ۴

$$d: \sqrt{۳}y = x + ۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{\sqrt{۳}}x + \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \tan\theta \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

با توجه به شکل، زاویهٔ بین خط d و نیمساز ناحیه‌های اول و سوم برابر است با ۱۵°.



۱۶. گزینه ۲

$$A = \frac{\cos^۴ x}{۳ + \sin^۲ x} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را بر } \sin^۴ x} A = \frac{\frac{\cos^۴ x}{\sin^۴ x}}{۳(\frac{۱}{\sin^۴ x}) + \frac{\sin^۲ x}{\sin^۴ x}} = \frac{\cot^۴ x}{۳(\frac{۱}{\sin^۲ x})^۲ + \frac{۱}{\sin^۲ x}} = \frac{\cot^۴ x}{۳(۱+\cot^۲ x)^۲ + (۱+\cot^۲ x)}$$

$$\xrightarrow[\cot x = ۲]{\text{طبق فرض}} A = \frac{۲^۴}{۳(۵)^۲ + ۵} = \frac{۱۶}{۸۰} = \frac{۱}{۵}$$

۱۷. گزینه ۴

چون $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^۲}}$ پس می‌توان نتیجه گرفت $\cos x > ۰$ است. (چون سمت راست تساوی همواره مثبت است.)

$$\Rightarrow \cos^۲ x = \frac{\cot x}{\cot x - a^۲} \xrightarrow{\text{دو طرف تساوی را عکس می‌کنیم}} \frac{۱}{\cos^۲ x} = \frac{\cot x - a^۲}{\cot x} \Rightarrow ۱ + \tan^۲ x = \frac{\cot x - a^۲}{\cot x}$$

$$\Rightarrow \cancel{\cot x} + \tan x = \cancel{\cot x} - a^۲ \Rightarrow \tan x = -a^۲ < ۰$$

پس باید انتهای کمان x در ناحیه دوم و یا چهارم باشد.

از طرفی چون گفتیم $\cos x > ۰$ پس قطعاً انتهای کمان x در ناحیه چهارم است.

۱۸. گزینه ۴

$$\frac{\tan^۴ x - \sin^۴ x}{\sin^۴ x - ۳\sin^۲ x + ۲} = \frac{\tan^۴ x(۱ - \frac{\sin^۴ x}{\tan^۴ x})}{(\sin^۲ x - ۱)(\sin^۲ x - ۲)} = \frac{\tan^۴ x(۱ - \cos^۴ x)}{(\sin^۲ x - ۱)(\sin^۲ x - ۲)} = \frac{\tan^۴ x(۱ - \cos^۲ x)(۱ + \cos^۲ x)}{-(۱ - \sin^۲ x)(۱ - \cos^۲ x - ۲)}$$

$$= \frac{\tan^۴ x \sin^۲ x(۱ + \cos^۲ x)}{-\cos^۲ x(-(۱ + \cos^۲ x))} = \tan^۴ x . \tan^۲ x = \tan^۶ x$$

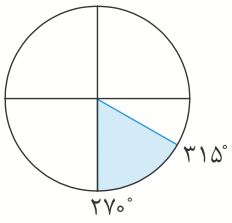
۱۹. گزینه ۲

$$A = \sqrt{\sin^۲\alpha(۱ + \cot\alpha) + \cos^۲\alpha(۱ + \tan\alpha)} = \sqrt{\sin^۲\alpha(۱ + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}) + \cos^۲\alpha(۱ + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})}$$

$$= \sqrt{\sin^۲\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \cos^۲\alpha + \cos\alpha\sin\alpha} = \sqrt{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha + ۲\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^۲} = |\sin\alpha + \cos\alpha|$$

با توجه به این‌که:

$$۲۷۰^\circ < \alpha < ۳۱۵^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha < ۰ \\ , \\ \cos\alpha > ۰ \end{cases}$$



و نیز در بازهٔ داده شده $|\sin\alpha| > |\cos\alpha|$ لذا عبارت $\sin\alpha + \cos\alpha < ۰$ است پس:

$$A = |\sin\alpha + \cos\alpha| = -\sin\alpha - \cos\alpha$$

۲۰. گزینه ۴

$$A = \sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x} \Rightarrow A^۲ = \tan x + \cot x + ۲\sqrt{\tan x . \cot x} \Rightarrow A^۲ = \tan x + \cot x + ۲ = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + ۲ = \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\sin x \cos x} + ۲$$

$$\Rightarrow A^۲ = \frac{۱}{\sin x \cos x} + ۲$$

با توجه به فرض داریم: $\sin x+\cos x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow(\sin x+\cos x)^۲=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow ۱+۲\sin x\cos x=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{۷}{۱۸}$

پس: $A^۲=\frac{۱}{\frac{۷}{۱۸}}+۲=\frac{۱۸}{۷}+۲=\frac{۳۲}{۷}\Rightarrow A=\sqrt{\frac{۳۲}{۷}}=۴\sqrt{\frac{۲}{۷}}$

۲۱. گزینه ۴

از نامساوی $\sqrt{۱+۲\sin x\cos x}\geq ۰$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\cos x\sqrt{۱+\tan^۲ x}>۰$ است.

از طرفی: $\cos x\sqrt{۱+\tan^۲ x}=\cos x\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}=\cos x\left(\frac{۱}{|\cos x|}\right)=۱\Rightarrow\sqrt{۱+۲\sin x\cos x}<۱\Rightarrow ۱+۲\sin x\cos x<۱$

$\Rightarrow ۲\sin x\cos x<۰\xrightarrow[\cos x>۰]{\text{چون}}\sin x<۰$

با توجه به این‌که $\cos x>۰\ ,\ \sin x<۰$ پس انتهای کمان x در ناحیه چهارم است.

۲۲. گزینه ۲

$\frac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲\sin\theta=۳(\sin\theta-\cos\theta)\Rightarrow ۲\sin\theta=۳\sin\theta-۳\cos\theta\Rightarrow$

$-\sin\theta=-۳\cos\theta\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=۳\Rightarrow\tan\theta=۳$

۲۳. گزینه ۴

ابتدا علامت $\sin x$ را پیدا می‌کنیم:

$\left.\begin{array}{l}\tan x<۰\Rightarrow x\text{ در ناحیهٔ دوم یا چهارم}\\ \cos x<۰\Rightarrow x\text{ در ناحیهٔ دوم یا سوم}\end{array}\right\}\Rightarrow x\text{ در ناحیهٔ دوم}\Rightarrow\sin x>۰$

سپس به کمک اتحادهایی که یاد گرفتیم، داریم:

$\tan x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cot x=-۲$

$\frac{۱}{\sin^۲ x}=۱+\cot^۲ x\Rightarrow\frac{۱}{\sin^۲ x}=۱+(-۲)^۲\Rightarrow\frac{۱}{\sin^۲ x}=۱+۴=۵\Rightarrow\sin^۲ x=\frac{۱}{۵}\xrightarrow{\sin x>۰}\sin x=\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

۲۴. گزینه ۴

a در ناحیهٔ چهارم است، پس $\sin a<۰$ و $\cos a>۰$.

به کمک اتحادهایی که یاد گرفتیم، داریم:

$\tan a=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow\cot a=-۳$

$\frac{۱}{\cos^۲ a}=۱+\tan^۲ a\Rightarrow\frac{۱}{\cos^۲ a}=۱+(-\frac{۱}{۳})^۲=۱+\frac{۱}{۹}=\frac{۱۰}{۹}\Rightarrow\cos^۲ a=\frac{۹}{۱۰}\xrightarrow{\cos a>۰}\cos a=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$

$\frac{۱}{\sin^۲ a}=۱+\cot^۲ a\Rightarrow\frac{۱}{\sin^۲ a}=۱+(-۳)^۲=۱+۹=۱۰\Rightarrow\sin^۲ a=\frac{۱}{۱۰}\xrightarrow{\sin a<۰}\sin a=-\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$

پس مختصات محل برخورد با دایرهٔ مثلثاتی $(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}},-\frac{۱}{\sqrt{۱۰}})$ است.

۲۵. گزینه ۲

فرض می‌کنیم $\sin x=a$، پس:

$\sin x+\frac{۱}{\sin x}=۲\Rightarrow a+\frac{۱}{a}=۲\Rightarrow a\times(a+\frac{۱}{a})=۲a\Rightarrow a^۲+۱=۲a\Rightarrow a^۲+۱-۲a=۰\Rightarrow(a-۱)^۲=۰\Rightarrow a=۱$

پس داریم: $a=۱\Rightarrow\sin x=۱\Rightarrow\cos x=۰$

$\sin^۲ x+\cos^۵ x=۱^۲+۰^۵=۱$